УДК 517.383

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Муромцева О.О.
Студент группы ЭиОЭПиССН 3-1с, 3курс, ФОИСТ,
Московский государственный университет
геодезии и картографии (МИИГАиК)
Коробов В.Д.
Студент группы ЭиОЭПиССН 3-1с, 3 курс, ФОИСТ,
Московский государственный университет геодезии и картографии
(МИИГАиК) E-mail :KorobovVLDM@gmail.com
Храмов В.В.
Студент группы СЗИТ-1, 1 курс
Донской государственный технический университет (ДГТУ)
E-mail: vxpamov@inbox.ru

Аннотация: Рассмотрены вопросы расположения точек среднего значения функций или их производных для некоторых специальных случаев, имеющих важное значение при обработке спутниковой информации в ходе космического мониторинга протяженных территорий для повышения точности картографирования.

Ключевые слова: теорема о среднем, признаки распознавания, идентификация

ABOUT ONE CHARACTERISTIC OF THE LOCATION OF MEDIUM POINTS

Muromtseva O.O.
Korobov V.D.
Khramov V.V.

Abstract: The questions of the location of the points of the mean value of the functions or their derivatives for some special cases that are important in the processing of satellite information during the space monitoring of extended territories to improve the accuracy of mapping are considered.

Keywords: the average of the average, signs of recognition, identification

Введение. В дифференциальном и интегральном исчислении [1] существует ряд «теорем о среднем», устанавливающих получение таких точек, в которых функция или её производная имеет то или иное среднее значение. В статье рассмотрено несколько частных случаев теоремы о среднем. Показано, что в этих случаях справедлива гипотеза В.К. Ионина, которая может быть представлена следующим образом. Пусть f — непрерывная вещественно-значимая функция, определенная на отрезке [0,1]. Для всех x∈(0,1]рассмотрим величину $\xi(x)$, являющуюся максимумом таких τ∈[0,x], что выполняется равенство $xf(\tau)=\int_0^x F(t)dt$. Тогда $\lim_{x\to 0}\frac{\xi(x)}{x}\geq\frac{1}{e}$

Исследование. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$. Для каждого числа $x\in(0,1)$ найдеться $\tau\in x[0,1]$ такое, что

$$xf(\tau)=\int_0^x f(t)dt$$

(специальный случай первой интегральной теоремы о среднем значении [2]). Такое τ находится единственным образом для возрастающей или убывающей функции f

В общем случае рассмотрим

$$g(x):=max\left\{\tau\in[0,x]|xf(\tau)=\int_0^x f(t)dt\right\}$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

В статье Ю.Г. Никонорова [2] сформулирована и доказана теорема: верхний предел отношения $g(x)/x$ при $x\to 0$ не может быть меньше e^{-1}.

Пусть $f(x) = x^t$

1.Возьмем t = 1, тогда f(x) = x.

$x\cdot\tau=\int_0^x f(t)dt$

$x\cdot\tau = x/2$

$\tau = /2$

$g(x) = x/2$

$\lim_{x\to 0} g(x)/x = 1/2$

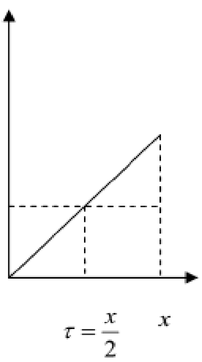


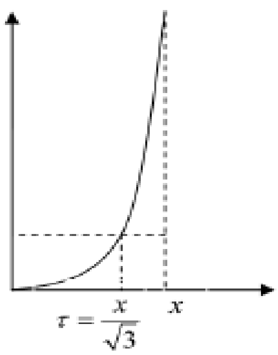
Рис. 1

2.Возьмем t = 2, тогда $f(x) = x^2$.

$x\cdot\tau^2=\int_0^x f(t)dt$

$x\cdot\tau^2 = x^3/3$

$\tau^2 = x^2/3$



$g(x) = x/\sqrt{3}$

$\lim_{x\to 0} g(x)/x = 1/\sqrt{3}$

Рис.2

3. При t = k имеем $f(x) = x^k$.

$x \cdot \tau^k = \int_0^x f(t)dt$

$x \cdot \tau^k = (x(k+1))/(k+1)$

$\tau^k = (x^k)/(k+1)$

$g(x) = x/\sqrt[k]{k+1}$

$\lim_{x\to 0} g(x)/x = 1/\sqrt[k]{k+1}$

4. При $f(x) = \begin{cases} \ln x, x \in (0,1] \\ 0, x = 0 \end{cases}$ получаем:

$x \ln \tau = x \ln x - x$

$\ln \tau = \ln x - 1$

$\tau = e^{\ln x -} = xe^{-1}$

$\lim_{x\to 0} g(x)/x = e^{-1}$

Для произвольной непрерывной функции имеет место неравенство

$\overline{\lim}_{x\to 0} \xi(x)/x \geq 1/e$,

где $\xi(x) = \max\{\tau \in [0, x] \mid \int_0^x f(t)\,dt = xf(\tau)\}$.

Допустим, что эта теорема не верна для функции f. Тогда существует число $q \in (0, 1/e)$ такое, что $\overline{\lim}_{x\to 0} \xi(x)/x < q$

Поскольку функция f непрерывна, можно подобрать такое число $a \in (0, 1)$, что $\int_0^x f(t)dt < xf(px)$, $x \in (0, a]$, $p \in [q, 1]$. (1)

Рассмотрим теперь функцию $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ определяемую равенствами

$g(0) = f(0)$, $g(x) = 1/x \int_0^x f(t)dt$, $x > 0$.

Ясно, что функция g непрерывна на отрезке [0, a] и имеет производную на (0, a], причем $g'(x)x + g(x) = f(x)$. Неравенство (1) при $p = 1$ принимает вид $g(x) < f(x) = g'(x)x + g(x)$, поэтому $g'(x) > 0$ при $x \in (0, a]$, и функция g возрастает на отрезке [0, a]. При $p = q$ неравенство (1) принимает вид *g(x) < f(qx) = qxg' (qx) + g(qx),* но неравенство *g(x) − g(qx) < qxg' (qx)* невозможно при q ∈ (0, 1/e) в силу следующей леммы.

Пусть непрерывная функция g: $[0, a] \to \mathbb{R}$ обладает на интервале $(0, a)$ положительной непрерывной производной и удовлетворяет для некоторого числа $q \in (0, 1)$ неравенству

$$g(x) - g(qx) < qxg'(qx),\ x \in (0, a/q]\ .$$

Тогда $q \geq 1/e$.

Проинтегрируем по x неравенство

$$qg'(qx) > 1/x(\ g(x) - g(qx)\ ) = 1/x\ \int_{qx}^{x} g'(t)dt\ ,$$

а затем уменьшим область интегрирования двойного интеграла, пользуясь тем, что g' (t) > 0:

$$g(qa) - g(0) = \int_0^a qg'(qx)dx > \int_0^a 1/x\left(\int_{qx}^{x} g'(t)dt\right)dx \geq \int_0^{qa} g'(t)\left(\int_t^{t/q} dx/x\right)dt = \int_0^a qg'(qx)\,dx \cdot ln1/q = \big(g(qa) - g(0)\big)\cdot ln1/q\ .$$

В силу возрастания функции g, получаем *ln(1/q)* < 1 или $q > 1/e$, что и требовалось доказать.

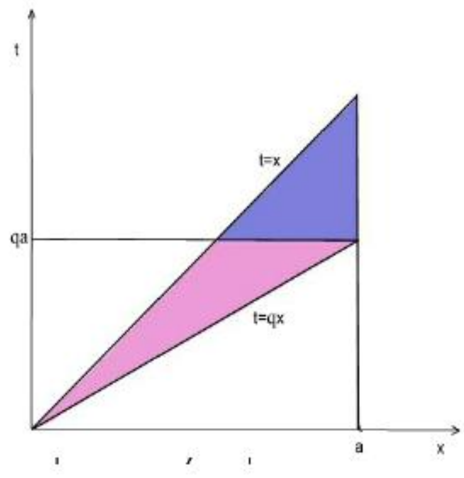


Рис.3

Выводы

Приведенные доказательства могут быть использованы в геодезических измерениях, проектировании узлов и деталей приборов для более быстрых и удобных расчетов поверхностей (или линий) различных предметов. На данный момент предложенный в статье подход получил практическое применение при формировании признаков распознавания в системах идентификации объектов распознавания на транспорте [3,4] в ходе мониторинга территорий и картографирования [5]. На результаты практических исследований получены патенты на изобретения – способы и системы[6,7].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 томах. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. М.: Дрофа; т.1 - 2003, 704с. URL: https://www.twirpx.com/file/123198/(Время обращения 10.02.2019г)
2. Никоноров Ю.Г. Об интегральной теореме о среднем // Сибирский математический журнал., 1993, том 34, № 6, 150–152 URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?jrnid=smj&option_lang=rus&paperid=817&wshow https://www.twirpx.com/file/123198/(Время обращения 10.02.2019г)
3. Гвоздев Д.С., Храмов В.В., Ковалев С.М., Голубенко Е.В. Прикладные методы идентификации в автоматизированных системах на транспорте: Монография / Ростовский государственный университет путей сообщения. – Ростов-на-Дону, 2015. – 186 с. URL:https://elibrary.ru/item.asp?id=27492569 (Время обращения 10.02.2019 г.).
4. Гвоздев Д.С., Линденбаум М.Д., Храмов В.В., Ковалев С.М. Гибридная модель идентификации подвижных единиц железнодорожного транспорта // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2013. – № 2 (50). – С. 92-98. – URL:https://elibrary.ru/item.asp?id=19020846 (Время обращения 10.02.2019г)
5. Храмов В.В. Методология представления территорий при целевом зондировании Земли из космоса // Интеллектуальные ресурсы - региональному развитию. – 2016. – № 2. – С. 142-149. – URL:https://elibrary.ru/item.asp?id=26133898 (Время обращения 10.02.2019г)
6. Акперов И.Г., Крамаров С.О., Лукасевич В.И., Повх В.И., Храмов В.В., Радчевский А.Н. Способ формирования цифровой план-схемы объектов сельскохозяйственного назначения и система для его реализации: Патент на изобретение RUS 2612326 24.02.2015. – URL:https://elibrary.ru/item.asp?id=35057856 (Время обращения 10.02.2019г).
7. Акперов И.Г., Крамаров С.О., Храмов В.В., Митясова О.Ю., Повх В.И Способ идентификации протяженных объектов земной поверхности: Патент на изобретение RUS 2640331 11.12.2015. – URL:https://elibrary.ru/item.asp?id=35057862 (Время обращения 10.02.2019г).